



1. Comprueba que  $F(x) = \operatorname{sen}^2 x$  es una primitiva de  $f(x) = \operatorname{sen} 2x$  y  $G(x) = -\frac{1}{2} \cos 2x$ , otra primitiva de  $f(x)$ . ¿En qué constante se diferencian?
2. Calcula de derivada de las funciones  $f(x) = \operatorname{arctg} x$  y  $g(x) = -\operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ . Y sin calculadora, obtén el valor de  $\operatorname{arctg} 7 + \operatorname{arctg} \frac{1}{7}$

### Integrales inmediatas

3. Calcula las siguientes integrales indefinidas:

a)  $\int \left( -3x^4 + 8x^3 - \frac{2}{3}x + 5 \right) dx$       b)  $\int \left( 1 - \frac{3}{x^2} + \sqrt[3]{x^2} \right) dx$       c)  $\int \sqrt[3]{x^2} \sqrt{x} dx$       d)  $\int \frac{\sqrt{5x^3}}{\sqrt[3]{3x}} dx$   
 e)  $\int (\operatorname{sen} x - 5e^x + 2\sqrt{x}) dx$       f)  $\int (3\operatorname{sen} x - 5\cos x) dx$       g)  $\int (5e^x - 5^x) dx$       h)  $\int \frac{3}{x^2 + 1} dx$

4. Calcula las siguientes integrales indefinidas:

a)  $\int \frac{x^4 - 5x^2 + 3x - 4}{x} dx$       b)  $\int \frac{7x^4 - 5x^2 + 3x - 4}{x^2} dx$       c)  $\int \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt{5x^3}}{3x} dx$       d)  $\int \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} dx$

5. Calcula, en cada caso, la función  $f(x)$  que verifica las condiciones dadas:

a)  $f'(x) = \cos x + x\sqrt{x}$  y  $f(\pi) = 0$       b)  $f'(x) = \frac{3}{1+x^2} - e^x$  y  $f(0) = 1$   
 c)  $f'(x) = x - 2\cos x$  y la gráfica de  $f$  corta a la bisectriz del 2º cuadrante en el punto de abscisa  $x = \pi$

6. Calcula una primitiva de  $y = \frac{x^2 + 3}{\sqrt{x}}$  y de  $y = \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}}$

7. Halla  $f(x)$  sabiendo que:  $f(0) = 1$ ,  $f'(0) = 2$ ,  $f''(x) = 3x$

8. Determina  $f(x)$  sabiendo que:  $f'''(x) = 24x$ ,  $f''(0) = 2$ ,  $f'(0) = 1$ ,  $f(0) = 0$

9. Un punto se mueve en línea recta con una velocidad dada por la fórmula  $v(t) = 12t - 5$  m/s.

Calcula el espacio recorrido,  $e(t)$ , en cada instante  $t$ , sabiendo que  $e(0) = 10$  m. ¿Cuál es la velocidad media entre  $t = 0$  s y  $t = 2$  s? Recuerda que la velocidad es la derivada del espacio respecto del tiempo.

10. Halla una función  $F(x)$  que verifique que  $x^5 F'(x) + x^3 + 2x = 3$  para  $x \neq 0$ .

11. Halla la ecuación de una curva  $y = f(x)$ , sabiendo que pasa por el punto (1,1) y que la pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa  $x$  es  $3x + 1$ .

### Integrales reducibles a inmediatas

12. Calcula las siguientes integrales indefinidas:

a)  $\int \cos^4 x \operatorname{sen} x dx$       b)  $\int 2^{\operatorname{sen} x} \cos x dx$       c)  $\int \operatorname{tg} x dx$       d)  $\int \operatorname{cotg} (3x + 2) dx$       e)  $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

13. Calcula las siguientes integrales indefinidas:

a)  $\int \frac{3}{2x+1} dx$       b)  $\int \frac{2}{x^2+1} dx$       c)  $\int \frac{3x}{x^2+1} dx$       d)  $\int \frac{3x^2}{x^2+1} dx$       e)  $\int \frac{3x}{5x^2+1} dx$       f)  $\int \frac{3}{5x^2+1} dx$       g)  $\int \frac{3x}{x^4+1} dx$

14. Calcula las siguientes integrales indefinidas:

a)  $\int \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx$       b)  $\int \frac{t+1}{\sqrt{t^2+2t+3}} dt$       c)  $\int \frac{e^{2s}}{1+e^{2s}} ds$       d)  $\int \frac{e^s}{1+e^{2s}} ds$       e)  $\int 5x(x^2+1)^{20} dx$



15. Calcula las siguientes integrales indefinidas:

a)  $\int \frac{3}{\sqrt{1-4x^2}} dx$     b)  $\int \frac{3x}{\sqrt{1-4x^2}} dx$     c)  $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}} dx$     d)  $\int \frac{3x}{\sqrt{1-x^4}} dx$

16. Una función  $y = f(x)$ ,  $x > -1$ , se sabe que tiene por derivada  $y' = \frac{a}{1+x}$  donde  $a$  es una constante. Determina la función si, además, se sabe que  $f(0) = 1$  y  $f(1) = -1$ .

17. De la función  $f : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  se sabe que  $f'(x) = \frac{3}{(x+1)^2}$  y que  $f(2) = 0$ .

a) Determina  $f$ .

b) Halla la primitiva de  $f$  cuya gráfica pasa por el punto  $(0,1)$

18. (CCSS2) Halla la función primitiva de  $f(x) = -7x^2 + x + 5$  que pasa por el punto  $(6,3)$

19. (CCSS2) Halla la función  $f(x)$  que toma el valor 2 en  $x=1$  y cuya derivada es  $f'(x) = 3x^2 + 6$

20. (CCSS2) Determina la ecuación de la función polinómica  $f$  que pasa por los puntos  $A(0,1)$ , y  $B(1,1)$ , y tal que  $f''(x) = 6x + 4$

21. (CCSS2) Resuelve las integrales indefinidas:

a)  $\int \left( \frac{x}{2} + x^2 - \sqrt{3} \right) dx$     b)  $\int \left( 6x^2 - \frac{4}{3x^7} + 2\sqrt{x} + \frac{7}{\sqrt[3]{x^2}} \right) dx$     c)  $\int \left( \sqrt{3x} + \sqrt[3]{5x^2} \right) dx$     d)  $\int \frac{3x^3 - 5x^2 + 2x - 3}{x^2} dx$

22. (CCSS2) Resuelve las integrales indefinidas:

a)  $\int 4 \cdot (4x-3)^2 dx$     b)  $\int (2x+1)^5 dx$     c)  $\int 4\sqrt{3x-5} dx$     d)  $\int \frac{3}{\sqrt{2x-2}} dx$     e)  $\int \frac{3}{2x-2} dx$     f)  $\int \frac{x}{3x^2-4} dx$

23. (CCSS2) Resuelve las integrales indefinidas:

a)  $\int xe^{x^2} dx$     b)  $\int \sqrt[3]{x+1} dx$     c)  $\int \sqrt[3]{\frac{x+3}{2}} dx$     d)  $\int x^2(1-4x^3) dx$

24. (CCSS2) Resuelve las integrales indefinidas:

a)  $\int \frac{(\ln x)^3}{x} dx$     b)  $\int \frac{3^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$     c)  $\int \frac{3x}{7-4x^2} dx$     d)  $\int e^{-2x} dx$

25. (CCSS2) Resuelve las integrales indefinidas:

a)  $\int \frac{x}{(x^2+1)^2} dx$     b)  $\int 2^x \sqrt{1-2^x} dx$     c)  $\int \frac{e^x}{5-2e^x} dx$     d)  $\int \frac{5^x}{\sqrt{1-5^x}} dx$

26. (CCSS2) Resuelve las integrales indefinidas:

a)  $\int \frac{x}{1+x^2} dx$     b)  $\int \frac{3}{(x-1)^2} dx$     c)  $\int \frac{1}{(x-2)^3} dx$     d)  $\int \sqrt{(1+e^x)^3} e^x dx$

27. (CCSS2) Encuentra dos funciones cuya derivada sea  $f'(x) = \frac{1}{x+1} + e^{2x}$  tales que en el punto  $x=0$  una tenga doble valor que la otra.

### Integración por partes

28. Calcula las siguientes integrales indefinidas:

a)  $\int xe^x dx$     b)  $\int x \operatorname{sen} x dx$     c)  $\int x^3 \ln x dx$     d)  $\int x \operatorname{arctg} x dx$  (En el cálculo de  $v$  poner  $c=1/2$ )

29. Calcula las siguientes integrales indefinidas:

a)  $\int x^2 \cos x dx$     b)  $\int \ln x dx$     c)  $\int e^{3x} \cos x dx$



30. Calcula las siguientes integrales indefinidas:

a)  $\int (x^2 - 5x + 1) \cos x \, dx$     b)  $\int \arctg x \, dx$     c)  $\int \arcsen x \, dx$     d)  $\int x(\ln x)^2 \, dx$     e)  $\int \sqrt{x} \ln x \, dx$

31. Al aplicar la integración por partes para calcular  $\int f(x) \sen x \, dx$ , donde  $f$  es cierta función derivable, se obtiene:

$$\int f(x) \sen x \, dx = -f(x) \cos x + \int 3x^2 \cos x \, dx$$

sabiendo que  $f(1) = 2$ , encuentra la expresión de  $f$ .

**Integrales racionales**

32. Calcula las siguientes integrales indefinidas racionales (el denominador solo tiene raíces reales simples):

a)  $\int \frac{5x^7 + 4x^2 + x - 1}{x + 2} \, dx$     b)  $\int \frac{3x^2 - 5x + 1}{2x + 1} \, dx$     c)  $\int \frac{2x - 1}{x^2 - 3x + 2} \, dx$     d)  $\int \frac{x^3 + 4x^2 - 10x + 7}{x^3 - 7x - 6} \, dx$

33. Calcula las siguientes integrales indefinidas racionales (el denominador tiene raíces reales múltiples):

a)  $\int \frac{3x^2 - 5x + 1}{(x - 2)^3} \, dx$     b)  $\int \frac{dx}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}$     c)  $\int \frac{x^3 + 22x^2 - 12x + 8}{x^4 - 4x^2} \, dx$

34. Calcula las siguientes integrales indefinidas racionales (el denominador solo tiene raíces complejas simples):

a)  $\int \frac{2x^3 + 4x^2 + 4x + 10}{2x^2 + 5} \, dx$     b)  $\int \frac{2x^3 + 5x + 10}{2x^2 + 5} \, dx$

35. Calcula las siguientes integrales indefinidas racionales (el denominador solo tiene raíces complejas simples):

a)  $\int \frac{3}{4x^2 - 4x + 5} \, dx$     b)  $\int \frac{3x + 1}{x^2 + 2x + 5} \, dx$

36. Calcula la siguiente integral indefinida racional (el denominador tiene raíces reales simples y múltiples y complejas simples):  $\int \frac{dx}{x^5 + x^2}$

37. Calcula la siguiente integral indefinida racional (el denominador tiene raíces reales y complejas simples):

$$\int \frac{2x^2 - 3x - 3}{(x - 1)(x^2 - 2x + 5)} \, dx$$

38. (PAU 2011 Jun A3 c) Sea  $f$  la función definida por  $f(x) = \frac{x}{x^2 - 3x + 2}$ . Obtener razonadamente:

c) La integral  $\int f(x) \, dx = \int \frac{x}{x^2 - 3x + 2} \, dx$ . (3 puntos).

39. (PAU 2009 Sep 3.1 b) Se consideran las funciones reales  $f(x) = 2x^2 + 12x - 6$  y  $g(x) = (x - 2) \cdot (x^2 + 9)$ . Se pide obtener razonadamente:

b) La función  $H(x) = \int \frac{f(x)}{g(x)} \, dx$  que cumple  $H(3) = \frac{\pi}{3}$  (1,7 puntos)

40. (PAU 2007 Sep 3.1 b) Dadas las funciones reales  $f(x) = 4x^2 + 2x + 10$  y  $g(x) = x^3 + x^2 + 5x + 5$ . Se pide:

b) Calcular la función  $H(x) = \int \frac{f(x)}{g(x)} \, dx$  que cumple  $H(0) = 0$ . (1,7 puntos).

41. (PAU 2007 Jun 3.1 b) Dadas las funciones reales  $f(x) = 12x^3 - 8x^2 + 9x - 5$  y  $g(x) = 6x^2 - 7x + 2$ . Se pide:

b) Calcular la función  $H(x) = \int \frac{f(x)}{g(x)} \, dx$  que cumple  $H(1) = 1$ . (1,7 puntos).



### Integración por cambio de variable

42. Explica el método de integración por cambio de variable y aplícalo para calcular:

a)  $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$     b)  $\int \cos x \operatorname{sen}^3 x dx$     c)  $\int \frac{2x dx}{\sqrt{9-x^2}}$     d)  $\int \frac{1-e^x}{1+e^x} dx$

43. Calcula la siguiente integral indefinida haciendo un cambio de variable:

$\int \frac{dx}{x-\sqrt[4]{x}}$  (Ayuda: cambio  $x=t^4$ )

44. Calcula la siguiente integral indefinida haciendo un cambio de variable:

$\int x\sqrt{x+1} dx$  (Ayuda: cambio  $x+1=t^2$ )

45. Calcula  $\int \frac{x^3}{(x+1)^2} dx$  de dos formas

- a) Usando fracciones simples.
- b) Mediante el cambio  $t = x + 1$

46. Calcula la siguiente integral indefinida haciendo un cambio de variable:

$\int \sqrt{e^x + 4} dx$  (Ayuda: cambio  $e^x + 4 = t^2$ )

47. Calcula la siguiente integral indefinida haciendo un cambio de variable:

$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x+1}} dx$  (Ayuda: cambio  $x=t^6$ )

48. Calcula la siguiente integral indefinida haciendo un cambio de variable:

$\int \sqrt{1-x^2} dx$  (Ayuda: cambio  $x = \operatorname{sen} t$ )

49. Calcula la siguiente integral indefinida haciendo un cambio de variable:

$\int \sqrt{\frac{x+5}{x}} dx$  (Ayuda: cambio  $\frac{x+5}{x} = t^2$ )

50. Calcula la siguiente integral indefinida haciendo un cambio de variable:

$\int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$  (Ayuda: cambio  $1-x=t^2$ )

### Integrales de algunas funciones trigonométricas

51. Calcula las siguientes integrales trigonométricas haciendo un cambio de variable:

a)  $\int \operatorname{sen}^3 x \cdot \cos^2 x dx$  (Ayuda: cambio  $\cos x = t$ )    b)  $\int \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^3 x dx$  (Ayuda: cambio  $\operatorname{sen} x = t$ )  
c)  $\int \operatorname{sen}^5 x dx$  (Ayuda: cambio  $\cos x = t$ )    d)  $\int \operatorname{sen}^3 x \cdot \cos^3 x dx$

52. Calcula las siguientes integrales indefinidas:

a)  $\int \cos^2 x dx$  (dos formas: fórmula trigonométrica y por partes)    b)  $\int \cos^4 x dx$

53. Calcula la siguientes integral indefinida

$\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^4 x} dx$  (Ayuda: cambio  $\operatorname{tg} x = t$  y por tanto  $dx = \frac{dt}{1+t^2}$ ,  $\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$ ,  $\operatorname{sen}^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$ )



54. Calcula las siguientes integrales indefinidas:

a)  $\int \frac{1}{\operatorname{sen} x} dx$

b)  $\int \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{1 + \cos x} dx$

(Ayuda: en ambas integrales cambio  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$  y por tanto  $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ ,  $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ ,  $\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}$ )

---